ORTOGONALITAS DI RUANG BERNORM

Oleh: Nursupiamin
Dosen Prodi Matematika STAIN Palopo

Abstrak :
Ortogonalitas merupakan salah satu konsep yang penting di ruang hasil kali dalam. Sementara itu, ortogonalitas di ruang bernorm belum dikenal secara umum. Akan tetapi, ada beberapa tipe ortogonalitas di ruang bernorm yang telah dikembangkan, yaitu ortogonalitas-BJ, -I, dan –P. Demikian halnya di ruang bernorm-2 terdapat konsep ortogonalitas-D. Pada makalah ini, dipaparkan secara singkat sifat-sifat dasar dari keempat ortogonalitas tersebut yang meliputi sifat nondegenerasi, simetri, homogen, aditif kanan, resolvabilitas, dan kontinuitas. Keekivalenan antara keempat ortogonalitas ini dengan ortogonalitas biasa di ruang hasil kali dalam juga dipaparkan dalam akhir makalah ini.

Kata Kunci: *Ortogonalitas, Ruang bernorm*

I. Pendahuluan

Pada ruang hasil kali $(X, \langle .,. \rangle)$, dua vector x dan y dikatakan orthogonal, ditulis $x \perp y$, jika $\langle x, y \rangle = 0$. Ada beberapa sifat dasar ortogonalitas di ruang hasil kali dalam $(X, \langle .,. \rangle)$ adalah:

a. Nondegenerasi: Jika $x \perp x$, maka $x = 0$.
b. Simetri: Jika $x \perp y$, maka $y \perp x$.
c. Homogenitas: Jika $x \perp y$, maka $\alpha x \perp \beta y$ untuk setiap α, β skalar.
d. Aditif Kanan: Jika $x \perp y$ dan $x \perp z$, maka $x \perp (y + z)$.
e. Resolvabilitas: Untuk setiap $x, y \in X$ terdapat skalar α sedemikian sehingga
f. $x \perp (\alpha x + y)$.
g. Kontinuitas: Jika $x_n \to x, y_n \to y$ (dalam norm) dan $x_n \perp y_n$ untuk setiap n, maka
h. $x \perp y$.

Keenam sifat di atas dipenuhi oleh hasil kali dalam biasa di ruang hasil kali dalam. Akan tetapi, di ruang bernorm tidak semua sifat tersebut dipenuhi.

Konsep orthogonal di ruang bernorm belum dikenal secara umum. Dalam ruang bernorm $(X, \|.\|)$ dikenal beberapa tipe ortogonalitas seperti yang dibahas oleh Partington yakni ortogonalitas-BJ (Birkhoff-James), ortogonalitas-I (Isosceles atau samakaki), ortogonalitas-P (Pythagoras), dan ortogonalitas-D (Diminnie).

II. Pembahasan

a. Ruang Bernorm dan Ruang Hasil Kali Dalam

Sebelum membahas ortogonalitas di ruang bernorm, pada bagian ini diperkenalkan terlebih dahulu pengertian norm dan hasil kali dalam.

Definisi 1

Suatu *norm* pada ruang vector X merupakan pemetaan dari X ke R, yang memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

[n1] Definit positif : a. $\|x\| \geq 0 \; \forall \; x \in X$

b. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika x =0

[n2] Perkalian scalar : $\|kx\| = |k|\|x\| \; \forall \; x \in X$ dan $k \in R$

[n3] Ketaksamaan segitiga : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \; \forall \; x, y \in X$

Ruang vector X yang dilengkapi dengan suatu norm disebut *ruang bernorm* yang dinotasikan dengan $(X, \|.\|)$.

Definisi 2

Suatu *hasil kali dalam* (atau hasil kali scalar) pada suatu ruang vector X merupakan pemetaan $\langle .,. \rangle : X \text{ x } X \to R$, yang memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut :

[i1] Definit positif : a. $\langle x, x \rangle \geq 0 \; \forall \; x \in X$

b. $\langle x, x \rangle = 0$ jika dan hanya jika x =0

[i2] Simetri : $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \; \forall \; x, y \in X$

[i3] Aditif : $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle \; \forall \; x,y,z \in X$
[i4] Homogen : $\langle kx,y\rangle = k\langle x,y\rangle \forall \; x,y \in X$ dan $k \in R$
Ruang vector X yang dilengkapi dengan suatu hasil kali dalam $\langle .,. \rangle$ disebut *ruang hasil kali dalam* yang dinotasikan dengan $(X, \langle .,. \rangle)$.

b. Ortogonalitas di Ruang Bernorm

Berikut diberikan definisi dan teorema yang berhubungan dengan ortogonalitas-ortogonalitas di ruang bernorm.

Definisi 3
Misalkan $(X, \|.\|)$ ruang bernorm dengan $x, y \in X$, maka:
1. x dikatakan ortogonalitas-BJ terhadap y (dinotasikan dengan $x \perp_{BJ} y$) jika dan hanya jika untuk setiap $\lambda \in R$ berlaku $||x + \lambda y|| \geq \|x\|$;
2. x dikatakan ortogonalitas-I terhadap y (dinotasikan dengan $x \perp_I y$) jika dan hanya jika untuk setiap $\lambda \in R$ berlaku $||x + y|| = \|x - y\|$;
3. x dikatakan ortogonalitas-P terhadap y (dinotasikan dengan $x \perp_P y$) jika dan hanya jika $||x||^2 + ||y||^2 = ||x - y||^2$

Ada beberapa sifat yang mungkin saja dipenuhi oleh definisi ortogonalitas di atas. Nursupiamin memeriksa dipenuhinya sifat-sifat dasar ortogonalitas-BJ, -I, dan –P di ruang bernorm terkecuali sifat resolvabilitas. Sebagaimana yang diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 1
Misalkan $(X, ||.||)$ ruang bernorm, maka
1. $\perp_{BJ}$ memenuhi sifat non degenerasi, homogenitas, dan kontinuitas.
2. $\perp_I$ memenuhi sifat non degenerasi, simetri, dan kontinuitas.
3. $\perp_{\mathrm{P}}$ memenuhi sifat non degenerasi, simetri, dan kontinuitas.

Teorema 2

Misalkan X ruang vector. Jika $\perp$ memenuhi sifat homogen dan aditif, maka himpunan semua vector yang orthogonal dengan $x \in X$ membentuk sub ruang.

Dari beberapa definisi ortogonalitas yang telah dikemukakan sebelumnya, diperoleh hubungan lain, yaitu jika $(X, ||.||)$ ruang norm dengan $x, y \in X$ dan $x \perp_P y$, maka kedua tipe ortogonalitas lainnya yaitu $\perp_I$ dan $\perp_{BJ}$ belum tentu berimplikasi satu dengan lainnya. Hal ini dapat ditunjukkan dengan mengambil contoh $x = (2, -2), y = (2,1)$ dengan $x, y \in l^1_{(2)}$. Akan tetapi, di ruang hasil kali dalam ketiganya ekuivalen, seperti yang dinyatakan dalam lemma berikut.

Lemma 1

Misalkan $(X, <.,.>)$ ruang hasil kali dalam, maka $x \perp y, x \perp_{BJ} y, x \perp_I y$, dan $x \perp_P y$ saling ekivalen.

Salah satu ortogonalitas di ruang bernorm yang dilengkapi dengan norm-2 adalah ortogonalitas-D. Berikut diberikan definisi dari ortogonalitas tersebut.

Definisi 4

Misalkan $(X, ||.,.||)$ ruang bernorm-2. Maka, x dikatakan ortogonal-D ke y, ditulis $x \perp_D y$, jika $||x, y|| = ||x||\,||y||$.

Di ruang hasil kali dalam, ortogonalitas-D ekivalen dengan ortogonalitas biasa di ruang hasil kali dalam sebagaimana yang diberikan dalam lemma berikut.

Lemma 2

Misalkan $(X, <.,.>)$ ruang hasil kali dalam yang juga dilengkapi dengan norm-2 standar, maka untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $x \perp_D y$ jika dan hanya jika $\langle x, y \rangle = 0$.

Khusus di ruang bernorm-2, ortogonalitas-D memenuhi semua sifat-sifat ortogonalitas yang dipaparkan pada pendahuluan makalah ini. Sedangkan, jika $(X, ||.||)$ merupakan ruang bernorm maka $\perp_D$ tidak memenuhi sifat aditif kanan. Seperti halnya ortogonalitas-BJ, -I, dan –P, belum diketahui berlakutidaknya sifat resolvabilitas untuk ortogonalitas-D.

Selain ortogonalitas-D, Khan dan Siddique mendefinisiskan ortogonalitas-BJ, -I, dan –P di ruang bernorm-2 sebagai berikut.

Definisi 5

Misalkan $(X, ||.,.||)$ ruang bernorm-2 standar. Untuk setiap $x, y \in X$ dan $\lambda \in \boldsymbol{R}$,

1. x dikatakan ortogonalitas-BJ dengan y, jika untuk semua z tak nol di X berlaku $||x + \lambda y, z|| \geq \|x, z\|$;
2. x dikat*akan ortogonalitas-I dengan y , jika untuk semua z tak nol di X berlaku*
3. $||x + y, z|| = \|x - y, z\|$;
4. x *dikata*kan ortogonalitas-P dengan y, jika untuk semua z tak nol di X berlaku $||x + y, z||^2 = ||x, z||^2 + ||y, z||^2$

Definisi di atas untuk di ruang bernorm-2 standar hanya dipenuhi oleh $x = 0$ atau $y = 0$. Gunawan, dkk memperlihatkan definisi di atas tidak baik dengan memberikan contoh salah satunya dengan mengambil $X = \boldsymbol{R}^2$ dengan $x = (1,0)$ dan $y = (0,1)$ di ruang bernorm-2 standar diperoleh $x \perp_I y$, $x \perp_P y$, dan $x \perp_{BJ} y$ hanya dipenuhi oleh $z = (a, 0)$ atau $z = (0, b)$ untuk $a, b \in \boldsymbol{R}$.

Oleh karena itu, nampak bahwa tidak ada dua vector tak nol di X yang ortogonalitas-BJ, ortogonalitas-I, dan ortogonalitas-P. Akan tetapi, Godini dalam Nursupiamin mengganti pernyataan pada definisi 5 " untuk setiap $z \neq 0$" dengan "untuk setiap $z \neq span(x, y)$" pada ruang bernorm-2 standar. Sementara untuk z lainnya, tidak ada dua buah vector tak nol sebut x dan y sedemikian sehingga $x \perp_I y$, $x \perp_P y$, dan $x \perp_{BJ} y$.

Daftar Pustaka

Gunawan, H., Mashadi, Gemawati, S., Nursupiamin, Sihwaningrum, I., 2006, *Orthogonality in 2-Normed Spaces Revisited*, Univ. Beograd. Publ. Electrotehn. Fak. Ser. Mat. 17, 76-83.

Khan, A., Siddiqui, A., 1982, *B-orthogonality in 2-Normed Spaces*, Bull. Cal. Math. Soc. 74, 216-222.

Nursupiamin, 2003, *Ortogonalitas-BJ, -I, -P, dan –D di Ruang Bernorm* (Tesis), Institut Teknologi Bandung.

Partington, J.R., 1986, *Orthogonality in Normed Spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. 33, 449-455.