PROSES SEMI MARKOV

Muh. Hajarul Aswad A
Prodi Pendidikan Matematika Jurusan Tarbiyah STAIN Papopo

Abstrak:
Proses markov adalah suatu keadaan dimana apabila state pada masa yang akan datang dari proses tidak tergantung pada masa yang telah lalu, melainkan hanya bergantung pada masa sekarang saja. Jika jangka waktu proses berada pada setiap keadaan sebelum pindah adalah sama dengan satu satuan, maka proses semi Markov tak lain adalah rantai Markov. Perhitungan proporsi waktu dari sebuah mesin untuk masing-masing keadaan mesin pada kondisi baik, kondisi sedang, atau kondisi rusak, dapat dilakukan dengan menggunakan konsep proses semi Markov.

Kata Kunci: *Proses Semi Markov*

I. Pendahuluan

Proses markov adalah suatu keadaan dimana apabila state pada masa yang akan datang dari proses tidak tergantung pada masa yang telah lalu, melainkan hanya bergantung pada masa sekarang saja. Misalkan proses yang berada pada keadaan 1,2,…,N, dan yang dapat berpindah dari keadaan 1→2→…→N-1→N→1, maka dalam jangka panjang proporsi waktu proses berada pada keadaan *i* adalah:

$$P_i = \frac{\mu_i}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}, \qquad i = 1,2,...N$$

dimana μ_i adalah ekspektasi jangka waktu proses berada pada keadaan *i* selama tiap kunjungan. Selanjutnya hasil tersebut digeneralisir untuk situasi berikut : Andaikan suatu proses dapat berada pada salah satu dari N keadaan 1,2,…N dan tiap kali proses masuk ke keadaan *i* maka ia berada pada keadaan tersebut dalam jangka waktu tertentu dengan mean μ_i dan kemudian pindah ke keadaan *j* dengan probabilitas P_{ij}. Proses yang demikian disebut proses semi Markov. Perhatikan bahwa jika jangka waktu proses berada pada setiap keadaan sebelum pindah adalah sama dengan satu satuan, maka proses semi Markov tak lain adalah rantai Markov. Atau dengan kata lain, rantai Markov adalah suatu proses discrete state Markov.

II. Proses Semi Markov

Misalkan sebuah proses stokastik dengan state 0, 1, …,sedemikian sehingga,jika ia berada di state *i*, dimana $i \geq 0$ maka :

(i).State selanjutnya yang akan masuk adalah state *j* dengan probabilitas $P_{ij}, i, j \geq 0$.

(ii).Biasanya, state selanjutnya yang akan masuk adalah state *j*,dimana waktu transisi dari *i* ke *j* memiliki distribusi F_{ij}.

Jika kita mengambil Z(t) sebagai state pada waktu *t*, maka $\{Z(t), t \geq 0\}$ dikatakan sebagai Proses Semi Markov.

Dengan demikian, suatu Proses Semi Markov bukanlah proses dari aturan Markov dimana biasanya state sekarang, dan selanjutnya adalah independent dari state sebelumnya. State dari proses pada waktu $t + \Delta t$ hanya tergantung dari state pada waktu t dan bukan pada waktu sebelum ke t. Untuk memprediksi state selanjutnya, tidak hanya dengan mengetahui state sekarang tetapi juga kita harus mengetahui jarak dari waktu yang digunakan dalam state tersebut. Tentu saja, pada saat terjadinya transisi kita ingin mengetahui semua state yang baru (dan bukan tentang state sebelumnya). Suatu Markov Chain adalah suatu Proses Semi Markov dimana:

$$F_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & , t < 1 \\ 1 & , t \geq 1 \end{cases}$$

Itu berarti, semua waktu transisi dari suatu Markov chain identik dengan 1.

Misalkan H_i adalah distribusi waktu dimana proses semi Markov berada dalam state *i* sebelum terjadinya transisi. Itu berarti, berdasarkan kondisi pada state selanjutnya, kita ketahui :

$$H_i(t) = \sum_j P_{ij} F_{ij}(t),$$

Dan misalkan pula μ_i dengan cara yang sama. Itu berarti,

$$\mu_i = \int_0^\infty x \, dH_i(x)$$

Jika kita memisalkan X_n sebagai kunjungan state yang ke-n, maka $\{X_n, n \geq 0\}$ adalah suatu Markov chain dengan probabilitas transisi P_{ij}. Ia dikatakan "embedded Markov chain" dari proses semi Markov.

Definisi 1
Misalkan Y_n adalah variabel acak untuk state dari suatu waktu kontinu pada markov Chain $\{X(t)\}, t \in [0, \infty)$ pada n kali lompatan. $Y_n = X(W_n)$, n = 0,1,2,… dimana W_n adalah waktu tunggu. Himpunan dari variable acak $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ disebut sebagai embedded Markov Chain atau gabungan lompatan Chain (the jump chain) dengan waktu kontinu dari Markov Chain $\{X(t)\}, t \geq 0$

Kita mengatakan proses semi Markov adalah "irreducible" jika embedded Markov chain juga irreducible.Misalkan T_{ii} adalah waktu antara transisi yang berhasil di dalam state *i* dan misalkan $\mu_{ii} = E[T_{ii}]$. Dengan menggunakan teori dari pertukaran proses pembaruan (renewal processes), maka mudah bagi kita untuk memperoleh suatu pernyataan tentang probabilitas limit dari proses semi Markov.

Pernyataan 1
Jika proses semi Markov adalah irreducible dan T_{ii} memiliki suatu distribusi yang "non lattice" dengan mean yang terbatas, maka:

$$P_i \equiv \lim_{t \to \infty} P\{Z(t) = i \mid Z(0) = j\}$$

ada dan independent dari inisial state. Lebih lanjut ditulis:

$$P_i = \frac{\mu_i}{\mu_{ii}}.$$

Akibat 1
Jika proses semi Markov irreducible dan $\mu_{ii} < \infty$, maka dengan probabilitas 1,

$$\frac{\mu_i}{\mu_{ii}} = \lim_{t \to \infty} \frac{banyaknya\, waktu\, dalam\, i\, selama\, [0, t]}{t}.$$

Itu berarti, $\frac{\mu_i}{\mu_{ii}}$ sama dengan proporsi jangka panjang waktu dalam state *i*.

Pada saat pernyataan 1 memberikan kita sebuah gambaran untuk probabilitas limit, itu tidak mungkin, biarpun sebuah cara benar-benar memperhitungkan P_i. Harus ditunjukkan bahwa "embedded Markov chain $\{X_n, n \geq 0\}$ " adalah irreducible dan positif recurrent,dan misalkan probabilitas stationarynya adalah $\pi_{j,} j \geq 0$. Itu artinya, $\pi_{j,} j \geq 0$ merupakan satu-satunya solusi dari

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} ,$$

$$\sum_j \pi_j = 1 ,$$

dan π_j memiliki tafsiran yang menjadi bagian dari Xn nya yang sama dengan *j*. (Jika Markov chain adalah aperiodic, maka π_j juga sama dengan $\lim_{n \to \infty} P\{X_n = j\}$.) Selanjutnya, karena π_j sama dengan bagian dari transisi ke dalam state *j*, dan μ_j adalah rata-rata waktu yang digunakan dalam state *j* tiap transisi,itu artinya bahwa probabilitas limit haruslah proporsional ke $\pi_j \ \mu_j$.

Teorema 2
Misalkan kondisi dari pernyataan 1 dan misalkan juga bahwa embedded Markov chain $\{X_n, n \geq 0\}$ adalah positif recurrent. Maka

$$P_i = \frac{\pi_i \mu_i}{\sum_j \pi_j \mu_j} .$$

Bukti
Didefinisikan notasi berikut:
Y_i (*j*) = banyaknya waktu yang digunakan dalam state *i* selama *j* kali kedatangan ke state tersebut, $i, j \geq 0$.
N_i (*m*) = nomor kedatangan ke state *i* dalam transisi *m* yang pertama dari proses Markov chain.
Berdasarkan notasi tersebut, kita ketahui bahwa proporsi dari waktu dalam *i* selama transisi *m* yang pertama, katakan $P_{i=m}$, adalah sebagai berikut:

$$P_{i=m} = \frac{\sum_{j=1}^{N_i(m)} Y_i(j)}{\sum_i \sum_{j=1}^{N_i(m)} Y_i(j)}$$

$$= \frac{\frac{N_i(m)}{m} \sum_{j=1}^{N_i(m)} \frac{Y_i(j)}{N_i(m)}}{\sum_i \frac{N_i(m)}{m} \sum_{j=1}^{N_i(m)} \frac{Y_i(j)}{N_i(m)}}$$

Sekarang, pada saat $N_i(m) \to \infty$ pada saat $m \to \infty$, maka berdasarkan hukum terkuat dari sekumpulan bilangan bahwa

$$\sum_{j=1}^{N_i(m)} \frac{Y_i(j)}{N_i(m)} \to \mu_i \ ,$$

dan berdasarkan hukum terkuat untuk proses pembaruan bahwa:

$\frac{N_i(m)}{m} \to$ (E [nomor dari transisi antara beberapa kedatangan ke *i*])$^{-1}$= π_i .

Karena itu, permisalan $m \to \infty$ di (**1**) menunjukkan bahwa:

$$\lim_{m \to \infty} P_{i=m} = \frac{\pi_i \mu_i}{\sum_j \pi_j \mu_j} \ ,$$

Dan pembuktian telah lengkap.

Berdasarkan teorema 2 menunjukkan bahwa probabilitas limit hanya tergantung pada probabilitas transisi P_{ij} dan rata-rata waktu $\mu_i, i, j \geq 0$.

Contoh 1

Tinjau sebuah mesin yang bisa berada pada salah satu dari tiga keadaan berikut: *kondisi baik, kondisi sedang, atau kondisi rusak.* Andaikan mesin tersebut akan berada dalam kondisi baik dalam jangka waktu tertentu dengan mean μ_1 dan akan beralih ke kondisi sedang atau rusak dengan probabilitas masing-masing 3/4 dan 1/4. Suatu mesin dalam kondisi sedang akan berada pada kondisi tersebut dalam jangka waktu tertentu dengan mean μ_2 dan kemudian menjadi rusak. Mesin yang rusak akan diperbaiki dan memerlukan waktu perbaikan dengan mean μ_3, dan hasil perbaikan dapat berada pada kondisi yang baik dengan probabilitas 2/3 dan berada pada kondisi yang sedang dengan probabilitas 1/3. Berapa proporsi waktu dari mesin pada masing-masing keadaan tersebut.

Penyelesaian

Misalkan π_i adalah bagian dari transisi ke dalam state *i*, maka berlaku :

$$\sum_i \pi_i = 1 \text{ dan } \pi_i = \sum_j \pi_i P_{ji}$$

Misalkan diketahui state/keadaan 1, 2, dan 3, itu berarti bahwa π_i memenuhi

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

$P_{ji}(t) = P\{X(t+s) = i \mid X(s) = j\}$

- Untuk *i* =1,

  $P_{11}(t) = P\{X(t+s) = 1 \mid X(s) = 1\} = 0$
  $P_{21}(t) = P\{X(t+s) = 1 \mid X(s) = 2\} = 0$
  $P_{31}(t) = P\{X(t+s) = 1 \mid X(s) = 3\} = 2/3$

  $$\pi_i = \sum_{j=1}^{3} \pi_j P_{ji}$$

  $$\pi_1 = \pi_1(0) + \pi_2(0) + \pi_3\left(\frac{2}{3}\right)$$

  $$= \frac{2}{3}\pi_3$$

  Jadi $\pi_1 = \frac{2}{3}\pi_3$ ……….(1)

- Untuk *i* =2,

  $P_{12}(t) = P\{X(t+s) = 2 \mid X(s) = 1\} = 3/4$
  $P_{22}(t) = P\{X(t+s) = 2 \mid X(s) = 2\} = 0$
  $P_{32}(t) = P\{X(t+s) = 2 \mid X(s) = 3\} = 1/3$

$$\pi_i = \sum_{j=1}^{3} \pi_j P_{ji}$$

$$\pi_2 = \pi_1(\frac{3}{4}) + \pi_2(0) + \pi_3(\frac{1}{3})$$

$$= \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3$$

Jadi $\pi_2 = \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3$ ……….(2)

- Untuk i =3,
  P₁₃(t) = P{X(t+s) = 3 | X(s) = 1 }= 1/4

$P_{13}(t) = P\{X(t+s) = 3 \mid X(s) = 1\} = 1/4$
$P_{23}(t) = P\{X(t+s) = 3 \mid X(s) = 2\} = 1$
$P_{33}(t) = P\{X(t+s) = 2 \mid X(s) = 3\} = 0$

$$\pi_i = \sum_{j=1}^{3} \pi_j P_{ji}$$

$$\pi_3 = \pi_1(\frac{1}{4}) + \pi_2(1) + \pi_3(0)$$

$$= \frac{1}{4}\pi_1 + \pi_2$$

Jadi $\pi_3 = \frac{1}{4}\pi_1 + \pi_2$ ……….(3)

Selanjutnya, karena $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, maka

$$\pi_1 = 1 - \pi_2 - \pi_3$$

$$= 1 - (\frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3) - (\frac{1}{4}\pi_1 + \pi_2)$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\pi_1 - \frac{1}{3}\pi_3 - \frac{1}{4}\pi_1 - \pi_2$$

$$= 1 - \pi_1 - \frac{1}{3}\pi_3 - \pi_2$$

$$2\pi_1 = 1 - \frac{1}{3}\pi_3 - \pi_2$$

Jadi $\pi_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\pi_3 - \frac{1}{2}\pi_2$

Karena $\pi_1 = \frac{2}{3}\pi_3$ maka

$$\frac{2}{3}\pi_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\pi_3 - \frac{1}{2}\pi_2$$

$$\frac{5}{6}\pi_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\pi_2$$

$$\pi_3 = \frac{6}{10} - \frac{6}{10}\pi_2$$

Karena $\pi_3 = \frac{1}{4}\pi_1 + \pi_2$ maka :

$$\frac{1}{4}\pi_1 + \pi_2 = \frac{6}{10} - \frac{6}{10}\pi_2$$

$$\frac{16}{10}\pi_2 = \frac{6}{10} - \frac{1}{4}\pi_2$$

$$= \frac{6}{10} - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{6}{10} - \frac{6}{10}\pi_2\right)\right)$$

$$= \frac{6}{10} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\pi_2$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{1}{10}\pi_2$$

$$\frac{15}{10}\pi_2 = \frac{5}{10}$$

$$\pi_2 = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Subtitusi $\pi_2 = \frac{1}{3}$ dan persamaan (1) ke persamaan (2)

$$\pi_2 = \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3$$

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{4}(\frac{2}{3}\pi_3) + \frac{1}{3}\pi_3$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\pi_3 + \frac{1}{3}\pi_3$$

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{6}\pi_3 \Rightarrow \pi_3 = \frac{2}{5}$$

Subtitusi $\pi_3 = \frac{2}{5}$ ke persamaan (1)

$$\pi_1 = \frac{2}{3}\pi_3$$
$$= \frac{2}{3}(\frac{2}{5}) \Rightarrow \pi_1 = \frac{4}{15}$$

Jadi diperoleh nilai $\pi_1 = \dfrac{4}{15}, \pi_2 = \dfrac{1}{3}$, dan $\pi_3 = \dfrac{2}{5}$.

Karena itu, P_i, proporsi waktu dari mesin pada saat state *i*, ditunjukkan oleh :

$$P_i = \frac{\pi_i \mu_i}{\sum_j \pi_j \mu_j}$$

Untuk *i* =1

$$P_1 = \frac{\pi_1\mu_1}{\sum_1^3 \pi_j \mu_j} = \frac{\pi_1\mu_1}{\pi_1\mu_1 + \pi_2\mu_2 + \pi_3\mu_3}$$

$$= \frac{\frac{4}{15}\mu_1}{\frac{4}{15}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 + \frac{2}{5}\mu_3}$$

$$= \frac{4\mu_1}{4\mu_1 + 5\mu_2 + 6\mu_3}$$

Untuk *i* =2,

$$P_2 = \frac{\pi_2\mu_2}{\sum_1^3 \pi_j \mu_j} = \frac{\pi_2\mu_2}{\pi_1\mu_1 + \pi_2\mu_2 + \pi_3\mu_3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\mu_2}{\frac{4}{15}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 + \frac{2}{5}\mu_3}$$

$$= \frac{5\mu_2}{4\mu_1 + 5\mu_2 + 6\mu_3}$$

Untuk *i* =3,

$$P_3 = \frac{\pi_3\mu_3}{\sum_1^3 \pi_j\mu_j} = \frac{\pi_3\mu_3}{\pi_1\mu_1 + \pi_2\mu_2 + \pi_3\mu_3}$$

$$= \frac{\frac{2}{5}\mu_3}{\frac{4}{15}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 + \frac{2}{5}\mu_3}$$

$$= \frac{6\mu_3}{4\mu_1 + 5\mu_2 + 6\mu_3}$$

Permasalahan dalam penentuan distribusi limit dari suatu proses semi Markov adalah bukan sekedar menemukan P_i. Kita bisa saja mengatakan tentang limit, dimana $t \to \infty$, merupakan bagian dalam state *i* pada waktu t dari transisi selanjutnya setelah waktu *t* + *x*, dan berdasarkan transisi tersebut, ia berada ke dalam state *j*. Untuk menunjukkan probabilitas ini, misalkan :

Y(t) = waktu dari t sampai transisi selanjutnya

S(t) = state yang terjadi pada saat transisi pertama setelah t.

Untuk menghitung

$$\lim_{t\to\infty} P\{Z(t) = i, Y(t) > x, S(t) = j\},$$

Kita gunakan lagi teori alternatif proses pembaruan.

Teorema 3

Jika proses semi Markov adalah irreducible dan nonlattice, maka:

$$\lim_{t\to\infty} P\{Z(t) = i, Y(t) > x, S(t) = j \mid Z(0) = k\} = \frac{P_{ij}\int_x^\infty \overline{F}_{ij}(y)dy}{\mu_{ii}}$$

Bukti

Katakan bahwa siklus permulaan masing-masing waktu dari proses masuk state *i* dan katakana bahwa ia “on” jika state tersebut adalah *i* dan akan kembali ke *i* untuk sekurang-kurangnya *x* satuan waktu selanjutnya dan state selanjutnya adalah *j*. Katakan ia “off” jika sebaliknya. Karena itu, kita memiliki alternative proses pembaruan. Keadaan apakah pada state setelah *i* adalah *j* atau bukan, kita lihat persamaan berikut :

E[“on” waktu dalam suatu cycle] = $P_{ij}E[(X_{ij}-x)^+]$,

dimana X_{ij} adalah variable acak yang memiliki distribusi F_{ij} dan menggambarkan waktu untuk membuat suatu transisi dari *i* ke *j,* dan $y^+ = \max(0,y)$. Karena itu

$$\begin{aligned}\text{E[“on” waktu dalam suatu cycle]} &= P_{ij}\int_0^\infty P\{X_{ij}-x>a\}da \\ &= P_{ij}\int_0^\infty \overline{F}_{ij}(a+x)da \\ &= P_{ij}\int_0^\infty \overline{F}_{ij}(y)dy\end{aligned}$$

Selama E [waktu siklus] = μ_{ii} , hasilnya sesuai dengan alternative proses pembaruan.

Dengan cara yang sama, (atau dengan menggunakan Teorama (1) setelah *j*) kita dapat menunjukkan akibatnya.

Akibat 2

Jika proses semi Markov irreducible dan non lattice, maka

$$\lim_{t\to\infty} P\{Z(t)=i, Y(t)>x \mid Z(0)=k\} = \int_x^\infty \overline{H}_i(y)dy/\mu_{ii}$$

III. Penutup

a. Probabilitas limit dalam Teorema 3 dan Akibat 2 memiliki interpretasi sebagai proporsi jangka panjang. Proporsi jangka panjang dari waktu proses semi Markov dalam state *i* akan melewatkan x satuan waktu selanjutnya tanpa suatu transisi dan akan menuju ke state *j*.
b. Perkalian dan penjumlahan Teorema 2 oleh μ_i , dan menggunakan $P_i = \mu_i / \mu_{ii}$, menghasilkan :

   $$\lim_{t\to\infty} P\{Z(t)=i, Y(t)>x\} = P_i\overline{H}_{i,e}(x)$$

   dimana $H_{i,e}$ adalah distribusi kesetimbangan dari H_i. Karena itu, probabilitas limit yang berada dalam state *i* adalah P_i dan dikatakan bahwa state pada *t* adalah *i* , waktu setelah transisi (untuk *t* mendekati ∞) memiliki distribusi kesetimbangan dari H_i.

c. Dalam tulisan ini diperlihatkan perhitungan proporsi waktu dari sebuah mesin untuk masing-masing keadaan mesin pada kondisi baik, kondisi sedang, atau kondisi rusak, dengan menggunakan konsep proses semi Markov.

Daftar Pustaka

S. Ross, *"Stochastic Processes, second edition"*, John Wiley, New York, 1996.

---------, *"Introduction to Probability Models, eight edition"*, Academic Press, Canada, 2003.

Linda J.S. Allen, "*An Introduction to Stochastic Processes With Applications to Biology*", Pearson Education, New Jersey, 2003.