

METODE NUMERIK UNTUK MENENTUKAN HARGA OPSI DENGAN MODEL VOLATILITAS LELAND

Arsyad L¹, Donny Citra Lesmana², Endar Hasafah Nugrahani³

^{1,2,3} IAIN Palopo, IPB University, IPB University

^{1,2,3} Jalan Agatis Balandai, Palopo; Jalan Meranti, Bogor 16680, Indonesia; Jalan Meranti,
Bogor 16680, Indonesia

E-mail : arsyad@iainpalopo.ac.id¹, donny.lesmana@graduate.uwa.edu.au²
e_nugrahani@ipb.ac.id³

ABSTRACT

Option price under transaction cost with leland volatility model is the solution of a non linear differential equations. To solve this equation used numerical methods based on an upwind finite difference for spatial discretization as well as the use of explicit and implicit methods for discretizing time-stepping. upwind finite difference method with explicit time-stepping scheme proved to be unstable so as not konvegen. While the use of implicit time-stepping scheme is proved monotonous, consistent and stable so that converge to the viscosity solution.

Keywords: option value, leland volatility model, upwind finite difference methode, convergence, nonlinear partial difeferensial equation.

PENDAHULUAN / INTRODUCTION

Hal terpenting dalam perdagangan opsi adalah penentuan harga jual yang optimal. Teori penentuan harga opsi telah dikembangkan pada tahun 1973 oleh Fisher Black dan Myron Scholes yang berhasil merumuskan masalah penentuan harga opsi ke dalam bentuk persamaan diferensial parsial (PDP) Black Scholes.

$$-W_t = \frac{1}{2} \sigma_0^2 S^2 W_{SS} + rSW_S - rW \quad (1)$$

dimana W adalah harga opsi, S adalah harga saham, σ adalah volatilitas harga saham, r adalah suku bunga bebas risiko, dan t adalah waktu (Black & Scholes 1973).

Model Black scholes menggunakan beberapa asumsi, yang salah satunya adalah tidak terdapat biaya transaksi. Model Black scholes tidak relevan sebab pada kenyataannya terdapat biaya transaksi di pasar saham. Dengan memasukkan biaya transaksi ke dalam model, Leland menunjukkan bahwa persamaan diferensial parsial (PDP) Black Scholes berubah menjadi persamaan diferensial parsial taklinear. Selanjutnya dengan mengasumsikan biaya transaksi proporsional dengan nilai uang dari aset yang dijual atau dibeli, Leland memodifikasi persamaan diferensial parsial (PDP) Black Scholes (1) menjadi persamaan diferensial parsial (PDP) Black Scholes taklinear

$$-W_t = \frac{\sigma^2(w_{SS})}{2} S^2 W_{SS} + rSW_S - rW \quad (2)$$

dengan volatitas termodifikasi sebagai berikut

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 \left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{k}{\sigma_0^2 \sqrt{\delta t}} \right) \text{Sign}(W_{SS}) \right), \quad (3)$$

di mana σ adalah volatilitas termodifikasi, k adalah biaya transaksi dan δt adalah periode transaksi (Leland 1985).

Dengan mentransformasi waktu $\tau = T-t$ persamaan (2) berubah menjadi

$$W_\tau = \frac{\sigma^2}{2} S^2 W_{SS} + r S W_S - r W \quad (4)$$

PDP tak linier tersebut tidak mempunyai solusi analitik sehingga dibutuhkan pendekatan metode numerik untuk menentukan solusi hampirannya. Beberapa pendekatan secara numerik dapat dilakukan untuk menentukan harga opsi yaitu dengan metode beda hingga (*finite difference method*), metode volume hingga (*finite volume method*), metode elemen hingga dan lain-lain. Pada penelitian ini akan dikembangkan metode beda hingga *upwind*.

TINJAUAN TEORITIK / LITERATURE REVIEW

Metode beda hingga *upwind* adalah suatu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial taklinear mengkombinasikan metode beda hingga maju dan beda hingga mundur untuk diskretisasi ruang (harga saham).

Persamaan Black-Scholes taklinear akan diaproksimasi dengan diskretisasi harga dan waktu. Untuk diskretisasi harga, misalkan $I = (0, S_{max})$ dibagi menjadi M sub-interval, dimana

$$I_i = (S_i, S_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, M - 1$$

dengan $0 = S_0 < S_1 < \dots < S_M = S_{max}$, dan untuk setiap $i = 0, 1, \dots, M - 1$ dimisalkan $h = S_{i+1} - S_i$. Untuk diskretisasi waktu, misalkan $\tau = (0, T)$ dibagi menjadi N sub-interval, dimana

$$\tau_n = (\tau_n, \tau_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

dengan $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T$ dan untuk setiap $n = 0, 1, \dots, N - 1$ dimisalkan $\Delta\tau = \tau_{n+1} - \tau_n$.

Aproksimasi turunan parsial pertama dan kedua diperoleh dari ekspansi deret Taylor, seperti berikut ini. Untuk sembarang $W^n = (W_0^n, W_1^n, \dots, W_M^n)'$ dan $W_i = (W_i^0, W_i^1, \dots, W_i^N)'$ dengan $i = 0, 1, \dots, M$ dan $n = 0, 1, \dots, N$, didefinisikan turunan pertama dan turunan kedua mengikuti operator beda hingga dengan menggunakan skema eksplisit dan implisit (Lesmana 2013).

Bentuk Skema Eksplisit

Pada skema eksplisit, variabel pada waktu $n+1$ dihitung berdasarkan variabel pada waktu n yang sudah diketahui. sehingga operator beda hingga yang digunakan adalah sebagai berikut :

$$(\delta_\tau W_i)(n) = \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta\tau_n}, \quad (5)$$

$$(\delta_S^+ W^n)(i) = \frac{W_{i+1}^n - W_i^n}{h}, \quad (\delta_S^- W^n)(i) = \frac{W_i^n - W_{i-1}^n}{h}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (\delta_{SS} W^n)(i) &= \frac{(\delta_S^+ W^n)(i) - (\delta_S^- W^n)(i)}{2h/2} \\ &= \frac{W_{i-1}^n - 2W_i^n + W_{i+1}^n}{h^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Bentuk Skema Implisit

Pada skema implisit variabel pada waktu $n+1$ dihitung berdasarkan variabel pada waktu n yang sudah diketahui serta variabel pada waktu $n+1$ yang belum diketahui. Sehingga, operator beda hingga yang digunakan adalah sebagai berikut

$$(\delta_{\tau} W_i)(n) = \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta \tau_n}, \quad (8)$$

$$(\delta_S^+ W^{n+1})(i) = \frac{W_{i+1}^{n+1} - W_i^{n+1}}{h}, \quad (\delta_S^- W^n)(i) = \frac{W_i^{n+1} - W_{i-1}^{n+1}}{h}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (\delta_{SS} W^{n+1})(i) &= \frac{(\delta_S^+ W^{n+1})(i) - (\delta_S^- W^{n+1})(i)}{2h/2} \\ &= \frac{W_{i-1}^{n+1} - 2W_i^{n+1} + W_{i+1}^{n+1}}{h^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

METODE PENELITIAN / METHODS

Penelitian ini di laksanakan dengan menggunakan metode studi literatur, yaitu dengan mengumpulkan teori dan data dari literatur terdahulu yang relevan dengan penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Melakukan diskretisasi untuk model Black-Scholes taklinear dengan diskretisasi beda hingga *upwind* untuk diskretisasi ruang (harga saham) serta diskretisasi eksplisit dan implisit untuk dikritisasi waktu.
2. Memeriksa kekonvergenan skema numerik metode beda hingga *upwind*.
3. Melakukan simulasi numerik untuk menunjukkan akurasi dari metode diskretisasi beda hingga *upwind*.

HASIL DAN PEMBAHASAN / DISCUSSION

Untuk menyelesaikan suatu permasalahan persamaan diferensial parsial dengan menggunakan metode beda hingga *upwind* ada beberapa hal yang perlu diperhatikan, yaitu kondisi syarat awal dan syarat batas, diskretisasi persamaan tersebut, serta kekonvergenan dari skema beda hingga *upwind*.

Syarat Awal dan Syarat Batas.

Syarat batas untuk persamaan Black-Scholes taklinear adalah sebagai berikut:

$$U(S, 0) = g_1(S), \quad S \in (0, S_{max}), \quad (11)$$

$$U(0, \tau) = g_2(\tau), \quad \tau \in (0, T], \quad (12)$$

$$U(S_{max}, \tau) = g_3(\tau), \quad \tau \in (0, T], \quad (13)$$

dengan g_1 , g_2 , dan g_3 adalah suatu fungsi yang diberikan dengan $g_1(0) = g_2(0)$ dan $g_1(S_{max}) = g_3(0)$. Fungsi g_1 , g_2 , dan g_3 dipilih berdasarkan tipe opsi, di mana dalam penelitian ini opsi yang akan digunakan adalah opsi eropa yaitu opsi *Call Vanilla*, *Put Vanilla*, *Butterfly*, dan *Cash or Nothing* (CoN) dengan syarat awal dan syarat batas sebagai berikut:

$$g_1 = \begin{cases} \max(S - K, 0) & \text{untuk call} \\ \max(K - S, 0) & \text{untuk put} \\ \max(S - K_1, 0 - 2 \max(S - K_2, 0) + \max(S - K_3, 0)) & \text{untuk butterfly} \\ B \times \mathcal{H}(S - K) & \text{untuk CoN} \end{cases}$$

$$g_2 = \begin{cases} 0 & \text{untuk call} \\ Ke^{-r\tau} & \text{untuk put} \\ 0 & \text{untuk butterfly} \\ 0 & \text{untuk CoN} \end{cases}$$

$$g_3 = \begin{cases} S_{max} - Ke^{-r\tau} & \text{untuk call} \\ 0 & \text{untuk put} \\ 0 & \text{untuk butterfly} \\ Be^{-r\tau} & \text{untuk CoN} \end{cases}$$

dengan \mathcal{H} adalah fungsi *heaviside*, B adalah konstanta, K , K_1 , K_2 , dan K_3 adalah harga stike.

Diskretisasi Eksplisit

Persamaan Black-Scholes taklinear (4) diaproksimasi dengan menggunakan operator (5-7) dan dengan mengaplikasikan metode beda hingga *upwind* serta diskretisasi eksplisit terhadap waktu menjadi sebagai berikut:

$$\delta_\tau U_i(j) - \frac{1}{2} \sigma^2 ((\delta_{SS} U^j)(i)) S_i^2 (\delta_{SS} U^j)(i) - \left(\frac{1+\text{sign}(r)}{2} \right) r S_i (\delta_S^+ U^j)(i) - \left(\frac{1-\text{sign}(r)}{2} \right) r S_i (\delta_S^- U^j)(i) + r U_i^j = 0. \quad (14)$$

Dalam model volatilitas leland diketahui bahwa nilai $r > 0$, sehingga persamaan di atas dapat ditulis menjadi:

$$\delta_\tau U_i(j) - \frac{1}{2} \sigma^2 ((\delta_{SS} U^j)(i)) S_i^2 (\delta_{SS} U^j)(i) - r S_i (\delta_S^+ U^j)(i) + r U_i^j = 0. \quad (15)$$

Selanjutnya, diperoleh:

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta\tau} - \frac{1}{2} \sigma^2 ((\delta_{SS} U^j)(i)) S_i^2 \left(\frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2} \right) - r S_i \left(\frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h} \right) + r U_i^j = 0, \quad (16)$$

$$U_i^{j+1} = \Delta\tau_j \frac{1}{2} \sigma^2 ((\delta_{SS} U^j)(i)) S_i^2 \left(\frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2} \right) + \Delta\tau_j r S_i \left(\frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h} \right) + (1 - \Delta\tau r) U_i^j. \quad (17)$$

Persamaan (17) dapat disederhanakan menjadi bentuk berikut:

$$U_i^{j+1} = \alpha_i^j(U^j) U_{i-1}^j + \beta_i^j(U^j) U_i^j + \gamma_i^j(U^j) U_{i+1}^j, \quad (18)$$

untuk $i = 1, \dots, M - 1$ dan $j = 1, \dots, N - 1$, di mana:

$$\alpha_i^j(U^j) = \frac{1}{h^2} \Delta\tau_j \frac{1}{2} \sigma^2 ((\delta_{SS} U^j)(i)) S_i^2, \quad (19)$$

$$\beta_i^j(U^j) = 1 - r \Delta\tau_j - \frac{1}{h} \Delta\tau_j r S_i^2 - \frac{1}{h^2} \Delta\tau_j \sigma^2 ((\delta_{SS} U^j)(i)) S_i^2, \quad (20)$$

$$\gamma_i^j(U^j) = \frac{1}{h} \Delta\tau_j r S_i^2 + \frac{1}{h^2} \Delta\tau_j \sigma^2 ((\delta_{SS} U^j)(i)) S_i^2. \quad (21)$$

untuk $i = 1, 2, \dots, M - 1$ dan $j = 0, 1, \dots, N$, sehingga persamaan (18) dapat dituliskan dalam bentuk notasi matriks berikut

$$\hat{U}^{j+1} = A^j(U^j) \hat{U}^j + B^j, \quad (22)$$

untuk $j = 1, 2, \dots, N$, di mana

$$A^j(U^j) = \begin{bmatrix} \beta_1^j & \gamma_1^j & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2^j & \beta_2^j & \gamma_2^j & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3^j & \beta_3^j & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{M-3}^j & \gamma_{M-3}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{M-2}^j & \beta_{M-2}^j & \gamma_{M-2}^j \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{M-1}^j & \beta_{M-1}^j \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\hat{U}^k = (U_1^k, U_2^k, \dots, U_{M-1}^k)' \text{ untuk } k = j, j + 1 \quad (24)$$

$$B^j = (\alpha_1^j U_0^j, 0, \dots, 0, \gamma_{M-1}^j U_N^j)' \quad (25)$$

Diskretisasi Implisit

Dengan cara yang sama pada diskritisasi eksplisit, dengan menggunakan diskretisasi skema implisit terhadap waktu, persamaan Black-Scholes taklinear (4) diaproksimasi mengikuti bentuk metode beda hingga *upwind* menggunakan operator (8-10) menjadi seperti berikut:

$$\alpha_i^{n+1}(U^{n+1})U_{i-1}^{n+1} + \beta_i^{n+1}(U^{n+1})U_i^{n+1} + \gamma_i^{n+1}(U^{n+1})U_{i+1}^{n+1} = \frac{1}{\Delta\tau_n}U_i^n, \quad (26)$$

untuk $i = 1, \dots, M - 1$ dan $n = 1, \dots, N - 1$, di mana:

$$\alpha_i^{n+1}(U^{n+1}) = -\frac{1}{2h^2}\sigma^2(\delta_{SS}U^{n+1})(i)S_i^2, \quad (27)$$

$$\beta_i^{n+1}(U^{n+1}) = \frac{1}{\Delta\tau_n} + \frac{1}{h^2}\sigma^2(\delta_{SS}U^{n+1})(i)S_i^2 + \frac{rS_i}{h} + r, \quad (28)$$

$$\gamma_i^{n+1}(U^{n+1}) = -\frac{1}{2h^2}\sigma^2(\delta_{SS}U^{n+1})(i)S_i^2 - \frac{rS_i}{h}. \quad (29)$$

Berdasarkan syarat batas (11-13), didefinisikan syarat awal dan syarat batas untuk persamaan (26) adalah sebagai berikut

$$U_i^0 = g_1(S_i) \quad U_0^n = g_2(\tau_n) \quad U_M^n = g_3(\tau_n) \quad (30)$$

untuk $i = 1, 2, \dots, M - 1$ dan $n = 1, \dots, N$, sehingga persamaan (26) dapat dituliskan dalam bentuk matriks berikut

$$A^{n+1}(U^{n+1})\hat{U}^{n+1} = \frac{1}{\Delta\tau_n}\hat{U}^n + B^{n+1}, \quad (31)$$

untuk $n = 1, \dots, N - 1$, di mana

$$A^{n+1}(U^{n+1}) = \begin{bmatrix} \beta_1^{n+1} & \gamma_1^{n+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2^{n+1} & \beta_2^{n+1} & \gamma_2^{n+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3^{n+1} & \beta_3^{n+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{M-3}^{n+1} & \gamma_{M-3}^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{M-2}^{n+1} & \beta_{M-2}^{n+1} & \gamma_{M-2}^{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{M-1}^{n+1} & \beta_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{U}^k = (U_1^k, U_2^k, \dots, U_{M-1}^k)' \text{ untuk } k = n, n + 1$$

$$B^{n+1} = (-\alpha_1^{n+1}U_0^{n+1}, 0, \dots, 0, -\gamma_{M-1}^{n+1}U_N^{n+1})'$$

Teorema 1. Matriks-M

Untuk sembarang $n = 0, 1, \dots, N$, $A^n = (A_{ij}^n)$ adalah suatu matriks-M untuk U^n yang diberikan.

Kekonvergenan dari Skema Numerik

Barles (1997) telah menunjukkan bahwa metode numerik dikatakan konvergen ke solusi viskositas jika metode tersebut terbukti konsisten, stabil dan monoton. Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa skema diskretisasi metode beda hingga *upwind* yang digunakan memenuhi syarat konvergen tersebut.

Untuk $1 \leq i \leq M - 1$ dan $0 \leq n \leq N - 1$ didefinisikan suatu fungsi F_i^{n+1} dimana

$$F_i^{n+1} = \left(-\frac{rS_i}{h}\right) U_{i+1}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta\tau_n} + \frac{rS_i}{h} + r\right) U_i^{n+1} - \frac{U_i^n}{\Delta\tau_n} - \frac{1}{h^2} \sigma^2((\Gamma^{n+1})(i))(\Gamma^{n+1})(i). \tag{32}$$

Teorema 2. Kemonotonan

Skema diskretisasi pada persamaan (26) monoton yaitu untuk sembarang $\varepsilon > 0$ dan $i = 1, 2, \dots, M - 1$,

$$Z_i^{j+1}(U_i^{j+1}, U_{i+1}^{j+1} + \varepsilon, U_{i-1}^{j+1} + \varepsilon, U_i^j + \varepsilon) \leq Z_i^{j+1}(U_i^{j+1}, U_{i+1}^{j+1}, U_{i-1}^{j+1}, U_i^j) \tag{33}$$

dan

$$Z_i^{j+1}(U_i^{j+1}, U_{i+1}^{j+1}, U_{i-1}^{j+1}, U_i^j) \geq Z_i^{j+1}(U_i^{j+1}, U_{i+1}^{j+1} + \varepsilon, U_{i-1}^{j+1} + \varepsilon, U_i^j + \varepsilon) \tag{34}$$

Teorema 3. Kestabilan

Untuk setiap $n = 0, 1, \dots, N - 1$, misalkan $U^{n+1} = (U_0^{n+1}, (\hat{U}^{n+1})', U_M^{n+1})'$ di mana \hat{U}^{n+1} adalah solusi dari (31), maka U^{n+1} memenuhi

$$\| U^{n+1} \|_{\infty} \leq \max\{\| g_1 \|_{\infty}, \| g_2 \|_{\infty}, \| g_3 \|_{\infty}\}$$

dengan , g_1, g_2 dan g_3 adalah syarat awal dan syarat batas (11– 13) dan $\| \cdot \|_{\infty}$ adalah norm l_{∞} .

Teorema 4. Kekonsistenan

Skema diskretisasi (26) konsisten.

Teorema ekuivalensi Lax menyatakan bahwa metode beda hingga konsisten untuk masalah nilai awal yang diberikan (Strikwerda, 1989).

Teorema 5. Kekonvergenan

Skema diskretisasi (26) konvergen ke solusi (4) dengan syarat batas (11) - (13) sebagai $(h, \Delta\tau) \rightarrow 0$.

Bukti:

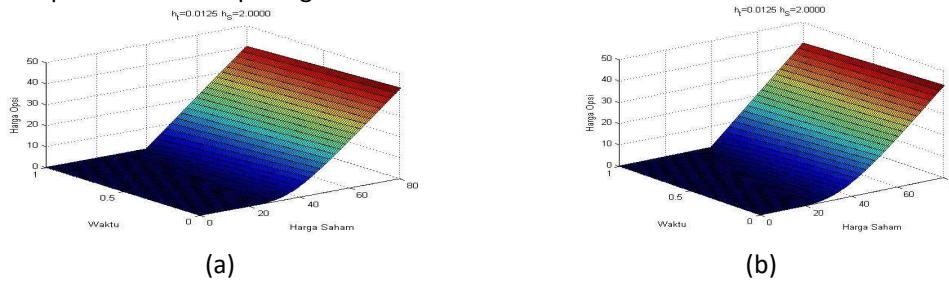
Barles (1997) membuktikan bahwa jika suatu diskretisasi dari PDP taklinear orde-2 yang konsisten, stabil dan monoton, maka konvergen ke solusi. Karena diskretisasi (26) terbukti konsisten, stabil dan monoton, maka diskretisasi (26) konvergen. Teorema 5 merupakan akibat dari teorema 2, 3 dan 4.

Simulasi Numerik

Pada bagian ini akan disajikan hasil pendekatan numerik dari empat jenis harga opsi tipe Eropa untuk melihat perilaku dan kekonvergenan dari metode beda hingga *upwind* baik dengan skema eksplisit maupun eksplisit. Di simulasi numerik ini akan ditentukan derajat kekonvergenan dari metode iteratif untuk penyelesaian persamaan taklinear dengan memilih serangkaian mesh yang dibangkitkan dengan membagi-dua parameter mesh pada iterasi sebelumnya.

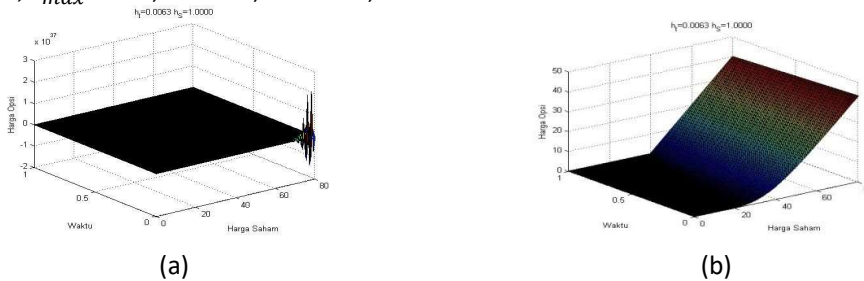
a) Opsi Call

- Perhitungan harga opsi Call menggunakan parameter $r = 0.1, \sigma_0 = 0.2, T = 1, K = 40, S_{max} = 80, k = 0.01, \delta t = 0.02, M = 20$ dan $N = 40$. Perbandingan skema eksplisit dan implisit bisa dilihat pada gambar berikut



Gambar 1 Harga dari opsi Call Eropa untuk posisi sebagai pembeli opsi dengan, (a) Skema eksplisit dan (b) Skema Implisit.

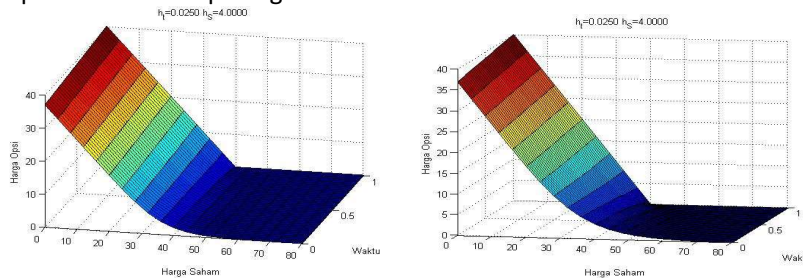
- Perhitungan harga opsi Call menggunakan parameter $r = 0.1, \sigma_0 = 0.2, T = 1, K = 40, S_{max} = 80, k = 0.01, \delta t = 0.02, M = 80$ dan $N = 160$.



Gambar 2 Harga dari opsi Call Eropa untuk posisi sebagai pembeli opsi dengan, (a) Skema eksplisit dan (b) Skema Implisit.

b) Opsi Put

- Perhitungan harga opsi Put menggunakan parameter $r = 0.1, \sigma_0 = 0.2, T = 1, K = 40, S_{max} = 80, k = 0.01, \delta t = 0.02, M = 20$ dan $N = 40$. Perbandingan skema eksplisit dan implisit bisa dilihat pada gambar berikut

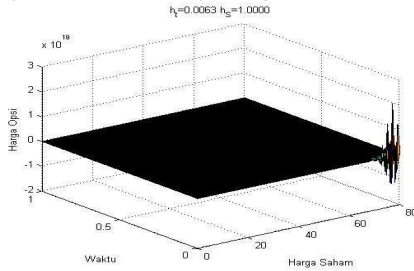


(a)

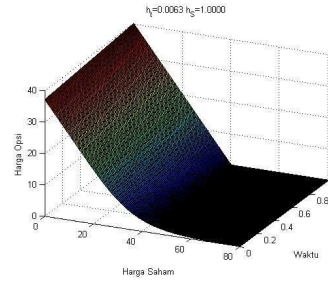
(b)

Gambar 3 Harga dari opsi *Put* Eropa untuk posisi sebagai pembeli opsi dengan, (a) Skema eksplisit dan (b) Skema Implisit.

- Perhitungan harga opsi *Put* menggunakan parameter $r = 0.1$, $\sigma_0 = 0.2$, $T = 1$, $K = 40$, $S_{max} = 80$, $k = 0.01$, $\delta t = 0.02$, $M = 20$ dan $N = 40$. Perbandingan skema eksplisit dan implisit bisa dilihat pada gambar berikut



Skema eksplisit

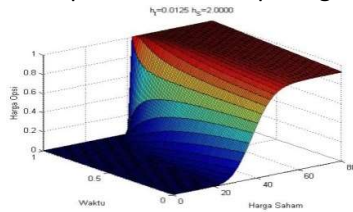


Skema Implisit

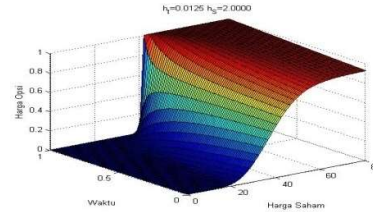
Gambar 4 Harga dari opsi *Put* Eropa untuk posisi sebagai pembeli opsi dengan, (a) Skema eksplisit dan (b) Skema Implisit.

c) Opsi *Cash or Nothing*

- Perhitungan harga opsi *Cash or Nothing* menggunakan parameter $r = 0.1$, $\sigma_0 = 0.2$, $T = 1$, $K = 40$, $S_{max} = 80$, $k = 0.01$, $\delta t = 0.02$, $M = 20$ dan $N = 40$. Perbandingan skema eksplisit dan implisit bisa dilihat pada gambar berikut.



(a)

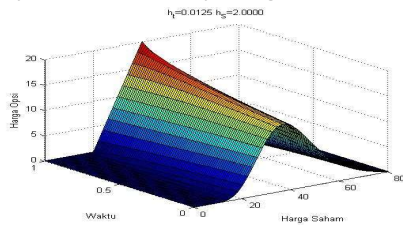


(b)

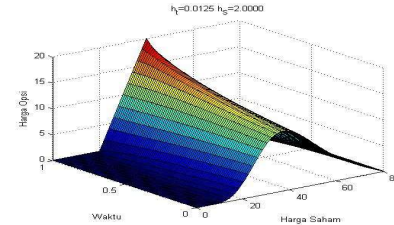
Gambar 5 Harga dari opsi *Cash or Nothing* Eropa untuk posisi sebagai pembeli opsi dengan, (a) Skema eksplisit dan (b) Skema Implisit.

d) Opsi *Butterfly*

- Perhitungan harga opsi *Butterfly* menggunakan parameter $r = 0.1$, $\sigma_0 = 0.2$, $T = 1$, $K = 40$, $S_{max} = 80$, $k = 0.01$, $\delta t = 0.02$, $M = 20$ dan $N = 40$. Perbandingan skema eksplisit dan implisit bisa dilihat pada gambar berikut.



(a)



(b)

Gambar 6 Harga dari opsi *Butterfly* Eropa untuk posisi sebagai pembeli opsi dengan, (a) Skema eksplisit dan (b) Skema Implisit.

Dari gambar dapat kita lihat pada saat $M = 20$ dan $N = 40$ hasil yang diperlihatkan metode eksplisit dan implisit tidak jauh berbeda. Namun ketika $M = 80$ dan $N = 160$ perbedaan yang

terjadi antara kedua metode tersebut sangat signifikan, hal ini disebabkan karena metode eksplisit tidak stabil sehingga polanya tidak beraturan untuk partisi yang lebih besar.

Selanjutnya akan dihitung orde kekonvergenan metode tersebut dengan membandingkan solusi eksaknya. Dimana dalam menghitung orde kekonvergenan metode tersebut, dipilih serangkaian mesh yang dibangkitkan secara berurutan dengan membagidua ukuran mesh sebelumnya. Karena solusi eksak tidak diketahui, maka digunakan solusi numerik dari mesh seragam dengan $h = 0.03125$, $M = 2560$ dan $\Delta\tau = 0.00078125$, $N = 1280$ sebagai solusi eksak, V_{eksak} . Selanjutnya dengan menggunakan solusi eksak tersebut, dihitung ratio dari solusi numerik dari mesh yang berurutan dengan

$$\text{Ratio} = \frac{\|V_h^{\Delta\tau} - V_{eksak}\|_{h,\infty}}{\|V_{h/2}^{\Delta\tau/2} - V_{eksak}\|_{h,\infty}}$$

Dimana $V_h^{\Delta\tau}$ adalah solusi pada mesh dengan h ukuran mesh saham dan $\Delta\tau$ ukuran mesh waktu, serta

$$\|V_h^{\Delta\tau} - V_{eksak}\|_{h,\infty} := \max_{1 \leq i \leq M; 1 \leq n \leq N} |V_i^n - V_{eksak}(S_i, \tau_n)|.$$

Untuk orde kekonvergenan metode numeriknya dihitung dengan

$$\text{Orde} = \text{rata} - \text{rata ratio}$$

Tabel 1 Hasil perhitungan orde kekonvergenan Skema implisit untuk opsi *Call* dan opsi *Put*

M	N	Opsii Call		Opsii Put	
		$\ \cdot\ _{h,\infty}$	Ratio	$\ \cdot\ _{h,\infty}$	Ratio
10	5	0.6848		0.6798	
20	10	0.3821	1.79	0.3808	1.79
40	20	0.2121	1.80	0.2118	1.80
80	40	0.1219	1.74	0.1218	1.74
160	80	0.0730	1.67	0.0729	1.67
320	160	0.0442	1.65	0.0442	1.65
640	320	0.0253	1.75	0.0253	1.75
1280	640	0.0114	2.22	0.0114	2.23

Hasil perhitungan ratio di Tabel 1 menunjukkan orde kekonvergenan metode *upwind* pada opsi *Call* dan opsi *Put* adalah sekitar 1.80.

Tabel 2 Hasil perhitungan orde kekonvergenan Skema implisit untuk opsi *Cash or Nothing* dan opsi *Butterfly*

M	N	Opsii Cash or Nothing		Opsii Butterfly	
		$\ \cdot\ _{h,\infty}$	Ratio	$\ \cdot\ _{h,\infty}$	Ratio
10	5	0.4013		1.2637	
20	10	0.3326	1.21	0.7017	1.80
40	20	0.2594	1.28	0.3866	1.82
80	40	0.1922	1.35	0.2142	1.80
160	80	0.1438	1.34	0.1223	1.75
320	160	0.1155	1.25	0.0712	1.72
640	320	0.0852	1.36	0.0398	1.79
1280	640	0.0512	1.66	0.0176	2.26

Hasil perhitungan ratio di Tabel2 menunjukkan orde kekonvergenan metode *upwind* pada opsi Cash or Nothing adalah sekitar 1.35 dan pada opsi *Butterfly* adalah sekitar 1.84 .

KESIMPULAN / CONCLUSION

Pada penelitian ini dapat terlihat bahwa penggunaan metode beda hingga *upwind* akan konvergen ketika menggunakan skema diskretisasi implisit terhadap waktu. di mana skema diskretisasi ini terbukti monoton, konsisten dan stabil. Sedangkan penggunaan diskretisasi eksplisit terhadap waktu terbukti tidak stabil sehingga tidak konvergen.

Berdasarkan hasil dari simulasi numerik, dapat ditunjukkan bahwa orde kekonvergenan untuk metode beda hingga *upwind* dengan model volatilitas leland adalah sekitar 1.80 untuk opsi *Call*, 1.80 untuk opsi *Put* , 1.35 opsi *Cash or Nothing*, serta 1.84 untuk opsi *Butterfly*.

DAFTAR PUSTAKA / REFERENCES

- Ankudinova J. and M. Ehrhardt. 2008. *The numerical solution of nonlinear Black-Scholes equations. Computers and Mathematics with Applications.*
- Bodie Z. Kane A. Marcus AJ. 2002. *Investments.* Ed ke-3. New Jersey: Prentice Hall.
- Barles G. 1997. *Convergence of numerical schemes for degenerate parabolic equation arising in finance,* in: L.C.G. Rogers, D. Talay (Eds.), *Numerical Methods in Finance.* Cambridge University Press. Cambridge.
- Black F & Scholes M. 1973. *The Pricing of Option and Corporate Liabilities.* J. Polit. Econ.
- Hull J. White A. 2006. *Option. Future. and Other Derivatives. 8th edition.* New Jersey: Prentice – Hall.
- Hull J. White A. 1987. *The pricing of option on asset with stochastic volatilities.* J. Finance. 42:281-300.
- Leland H. E. 1985. *Option pricing and replication with transaction costs.* Journal of finance.
- Lesmana DC & Wang S. 2013. *An upwind finite difference for a nonlinear Black-Scholes equation governing European option valuation under transaction costs.* Journal of applied mathematics and computation.
- Niwiga DB. 2005. *Numerical method for valuation of financial derivatives.* [Thesis]. South Africa : University of Werstern Cape.
- Strikwerda JC. 1989. *Finite difference schemes and partial differential Equation (1 st ed.).* chapman & Hall.